新高2 数学α クラス　休塾中の課題

概要

プログレス数学Ⅱ を用いて、以下の手順に従って学習を行うこと。解いた問題は、次回授業時に宿題としてチェックする。（前回の宿題も取り組むこと）

内容

1 剰余の定理

整式 $P(x)$ を $x-\alpha$ で割った余りは $P(\alpha)$ となる

について、P22 例題1 で復習した後に、次の問題を解く

課題　P23 類題1

2 因数定理

整式 $P(x)$ が $x-\alpha$ を因数にもつ $\Leftrightarrow$ $P(\alpha)=0$

を用いて、高次方程式の解法を P23 例題2 で復習した後に、次の問題を解く

課題　P23 類題2

3 複素数の相等条件

a, b が実数のとき

$$a+bi=0 \implies a=b=0$$

を P13 例題2 で復習した後、P24 例題4 の解答（別解は除く）をよく読んで理解した上、次の問題を解く

課題　P24 類題4

4

方程式 $x^3=1$ を解いて、そのうちの虚数解（の1つ）を ω（オメガ）とおいたとき、次の性質をみたすことを確認する

① $\omega^3=1$　② $\omega^2+\omega+1=0$

この①、②を用いて、P24 例題3 の解答を理解した上、次の問題を解く

課題　P24 類題3

5

P25 演習問題の次の問題に取り組む

課題　P25 問題5と6

以上

新高2 数学βクラス　休塾中の課題

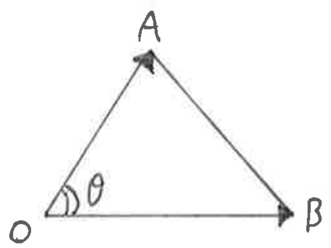
概要

プログレス数学Bを用いて、以下の手順に従って学習する
解いた問題は、次回授業時に宿題としてチェックする
（前回授業の課題も取り組むこと）

内容

□1 ベクトルの内積の定義（下記の説明を熟読せよ）

下図において、$\angle AOB = \theta$ とする



このとき、

$|\overrightarrow{OA}| \times |\overrightarrow{OB}| \times \cos\theta$

の値を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ の内積という

$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ の内積は $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ と記す。

つまり、

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| \times |\overrightarrow{OB}| \times \cos\theta$$

また、$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ の内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ は、$\triangle ABC$ で考えて、

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \times |\overrightarrow{AC}| \times \cos\angle BAC$$

と定める。

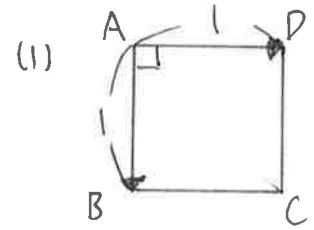
P38 例題4

1辺の長さが1の正方形ABCDにおいて、
次の内積を求めよ

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$　　(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

解答・解説

(1)

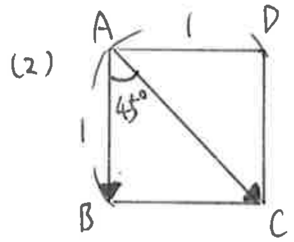


$\angle BAD = 90°$ である

内積の定義より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} &= |\overrightarrow{AB}| \times |\overrightarrow{AC}| \times \cos\angle BAD \\ &= 1 \times 1 \times \cos 90° \\ &= 1 \times 1 \times 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

(2)



$\angle BAC = 45°$

$AB = 1$, $AC = \sqrt{2}$ である。

内積の定義より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= |\overrightarrow{AB}| \times |\overrightarrow{AC}| \times \cos\underbrace{\angle BAC}_{45°} \\ &= 1 \times \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= 1\end{aligned}$$

この解説を参考に次の問題を解け

課題　P39 類題4

2 2つのベクトルのなす角の定義 (熟読せよ)

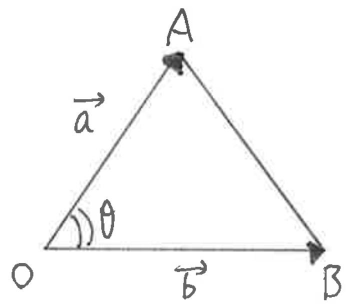
$\vec{0}$ でない 2つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ に対し

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{OB}$$

として、点 A, B を定める (O は基準の点)

このとき $\angle AOB = \theta$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角という

なす角は $0° \leqq \theta \leqq 180°$ の範囲とする



なお、$\theta = 0°$ のとき

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は 同じ向き

$\theta = 180°$ のとき

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は 逆向き とする

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積の定義

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とするとき

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

と定める

P38 例題3 の解答を熟読し、次の問題を解け

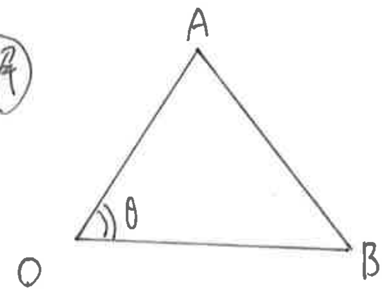
課題 P38 類題3

3 内積と余弦定理の関係 (熟読せよ)

問 △OAB において、以下の式が成り立つことを示せ

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \frac{|\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2}{2}$$

解



$\angle AOB = \theta$ とおくと

余弦定理より

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA\times OB\cos\theta \quad \cdots ①$$

$OA = |\overrightarrow{OA}|, \ OB = |\overrightarrow{OB}|, \ AB = |\overrightarrow{AB}|$ により

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 - 2|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta$$

ここで、内積の定義より

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta \quad \cdots ②$$

①, ② より

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 - 2(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})$$

したがって

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \frac{|\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2}{2} \quad //$$

4 ベクトルの成分表示の復習

前回までの授業ノートを読み返して、ベクトルの成分表示の復習をせよ。その上で、P37 例題1 を参考に、次の問題を解け

課題 P38 類題1

5 成分表示と内積 (熟読せよ)

問 $\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$ と成分表示したとき内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ が次の式で表されることを示せ

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

解 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ として点A, Bを定める

このとき

$$|\overrightarrow{OA}|^2=|\vec{a}|^2=a_1^2+a_2^2$$

$$|\overrightarrow{OB}|^2=|\vec{b}|^2=b_1^2+b_2^2$$

$$|\overrightarrow{AB}|^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2=(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2$$

$$=(a_1^2+a_2^2)+(b_1^2+b_2^2)-2(a_1b_1+a_2b_2)$$

3 で示した $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\dfrac{|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2}{2}$ に代入して

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$$

$$=\frac{(a_1^2+a_2^2)+(b_1^2+b_2^2)-\{(a_1^2+a_2^2)+(b_1^2+b_2^2)-2(a_1b_1+a_2b_2)\}}{2}$$

$$=a_1b_1+a_2b_2 \quad //$$

この公式を用いて、P39 例題5 (1) の解答を参考に、次の問題を解け

課題 P39 類題5 (1)

6 P39 例題5 (2) (熟読せよ)

$\vec{a}=(1, 2)$, $\vec{b}=(1, -3)$ のとき

$\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ

解 公式より $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot1+2\cdot(-3)=-5$

$$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$$

$$|\vec{b}|=\sqrt{1^2+(-3)^2}=\sqrt{10}$$

内積の定義 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ より

$$-5=\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}\cos\theta$$

$\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より $\theta=135^\circ$ //

これを参考に次の問題を解け

課題 P39 類題5 (2)

以上